数字电路与逻辑设计B

第五讲

南京邮电大学

电子与光学工程学院

臧裕斌

第2章 逻辑代数理论及电路实现

2.1 逻辑代数中的运算

一、基本逻辑

二、逻辑变量

三、逻辑函数及其表示方法

四、基本逻辑运算

五、复合逻辑运算

二、反演规则 ： 用于求反函数

F $\quad\quad$ $\overline{F}$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$F=A+B$ $\quad\quad$ $\overline{F}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

$F=A\cdot B$ $\quad\quad$ $\overline{F}=\overline{A}+\overline{B}$

F		$\overline{F}$
$\cdot$	$\longrightarrow$	$+$
$+$	$\longrightarrow$	$\cdot$
1	$\longrightarrow$	0
0	$\longrightarrow$	1
A	$\longrightarrow$	$\overline{A}$
$\overline{A}$	$\longrightarrow$	A

(1) 与运算优先或运算，若有括号，先算括号内

$$F=A\cdot B+C\cdot D \qquad \overline{F}=(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{C}+\overline{D})$$

(2) 不属于单个变量上的非号，在变换时应保留

$$F=\overline{\overline{A\cdot B}+C\cdot D} \qquad \overline{F}=\overline{\overline{\overline{A}+\overline{B}}\cdot(\overline{C}+\overline{D})}$$

例3　若 $F=\bar{A}\,\bar{B}+C\,D$，

试用反演规则求反函数 $\bar{F}$。

解：$\bar{F}=(A+B)\cdot(\bar{C}+\bar{D})$

例4　若 $F=\bar{A}+\overline{\overline{B+C}\cdot D}$，

试用反演规则求反函数 $\bar{F}$。

解：$\bar{F}=A\cdot\overline{\overline{\bar{B}\,\bar{C}}+\bar{D}}$

常用关系式

(1) $\overline{\overline{F}} = F$；

(2) 若 $F = G$，则 $\overline{F} = \overline{G}$；反之也成立。

证明:$(A+B)(A+\overline{B}) = A$

解:令$F=(A+B)(A+\overline{B})$

因$\overline{F}=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B = \overline{A}$　故$F=(A+B)(A+\overline{B}) = A$

三、对偶规则 ： 用于等式的证明

F		F′
·	⟶	+
+	⟶	·
1	⟶	0
0	⟶	1

(1) 与运算优先或运算，若有括号，先算括号内

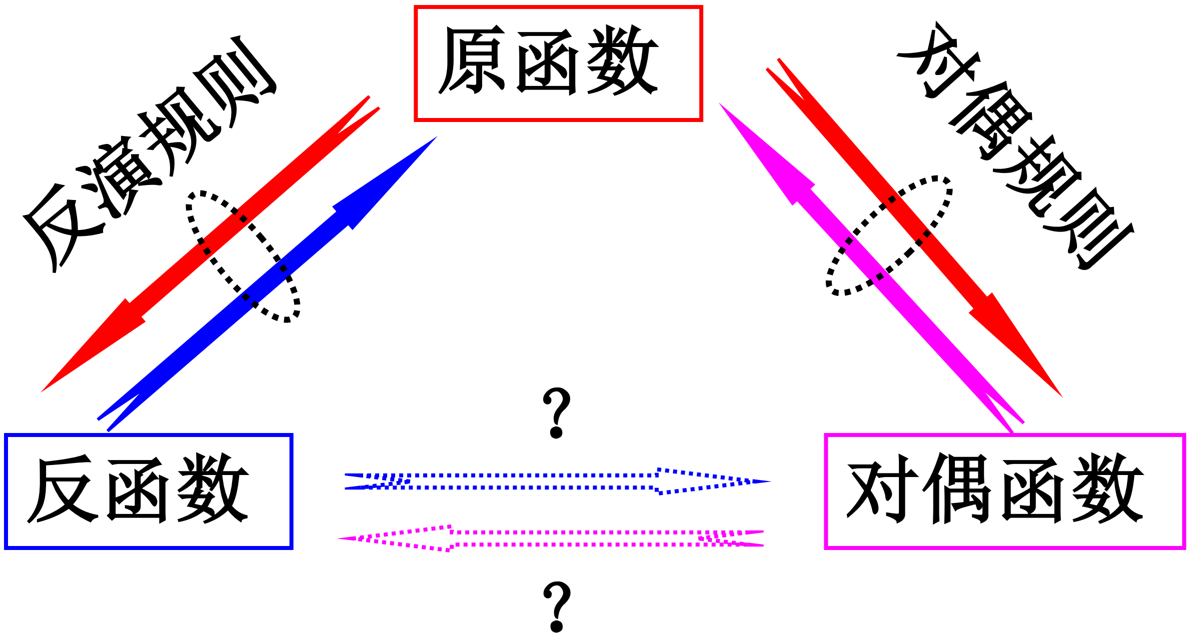
(2) 不属于单个变量上的非号，在变换时应保留

常用关系式

(1) $(F')' = F$;

(2) 若 $F = G$，则 $F' = G'$；反之也成立。

三种函数间转换关系



原函数　反函数　对偶函数

F	$\overline{F}$	F'
$\cdot$	$+$	$+$
$+$	$\cdot$	$\cdot$
1	0	0
0	1	1
A	$\overline{A}$	A
$\overline{A}$	A	$\overline{A}$

F	F'
$\cdot$	$+$
$+$	$\cdot$
1	0
0	1

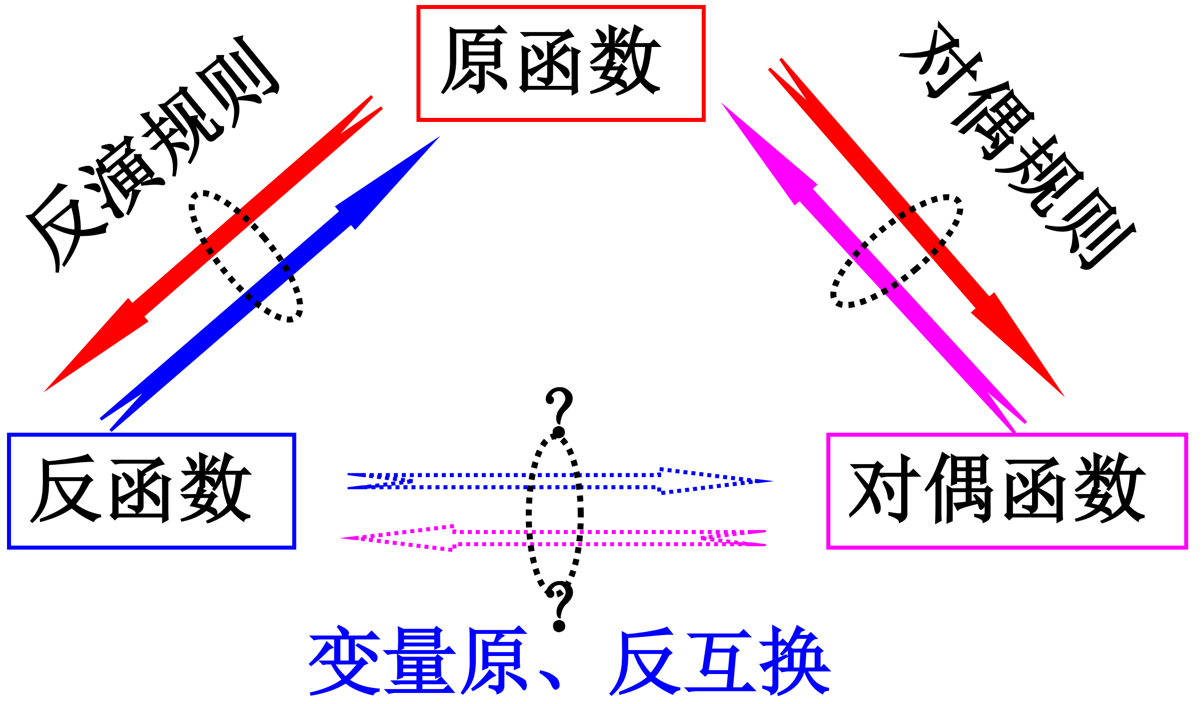
将 $\overline{F}$ 中的变量原、反互换后即可得到 F'。

原函数 F	对偶函数 F'	反函数 $\overline{F}$
$\cdot$	$+$	$+$
$+$	$\cdot$	$\cdot$
1	0	0
0	1	1
A	A	$\overline{A}$
$\overline{A}$	$\overline{A}$	A

F	$\overline{F}$
$\cdot$	$+$
$+$	$\cdot$
1	0
0	1
A	$\overline{A}$
$\overline{A}$	A

将 F'中的变量原、反互换后即可得到 $\overline{F}$；

三种函数间转换关系



对偶规则应用于基本公式

$$A + 0 = A \qquad A \cdot 1 = A$$

$$A + 1 = 1 \qquad A \cdot 0 = 0$$

$$A + A = A \qquad A \cdot A = A$$

$$A + \overline{A} = 1 \qquad A \cdot \overline{A} = 0$$

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

对偶规则应用于常用公式

$$AB + A\overline{B} = A \qquad (A+B)(A+\overline{B}) = A$$

$$A + AB = A \qquad A(A+B) = A$$

$$A + \overline{A}B = A + B \qquad A(\overline{A}+B) = AB$$

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$$

思考题

- **1.事物间的基本因果关系有几种？分别是什么？**
- **2.一个逻辑变量的取值有几种？分别是什么？**
- **3.如何理解1+1=1？**
- **4.解释概念：逻辑相邻项。**
- **5.对偶函数和反函数如何相互转换？**

作业题

2.3 (1)(3)

2.5 (1)(2)(3)

2.4

辨析题

因 $(A)' = A$　令 $A = CD$　则 $(CD)' = CD$　×

因 $(\overline{A})' = \overline{A}$　令 $A = CD$　则 $\left(\overline{CD}\right)' = \overline{CD}$　×

结论

以上带对偶算符的等式不成立，代入规则不适用。

2.5 逻辑函数的标准形式

一、常见表达式

二、标准表达式

1.最小项、最小项表达式

2. 最小项的性质

3. 几个关系式

4. 由一般表达式写出最小项表达式的方法

5. 由真值表写出最小项表达式的方法

2.6 逻辑函数的化简

一、化简的意义和最简的标准

1.化简的意义（目的）

2. 化简的目标

3.最简的标准

二、公式法

1.与或式的化简

作业

2.5 逻辑函数的表达式

一、常见表达式

$$F = AB + \bar{A}C = \overline{\overline{AB + \bar{A}C}} = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\bar{A}C}}$$

与或式

与非—与非式

$$= \overline{(\bar{A} + \bar{B}) \cdot (A + \bar{C})} = \overline{A\bar{B} + \bar{A}\,\bar{C}}$$

与或非式

$$= (\bar{A} + B) \cdot (A + C)$$

或与式

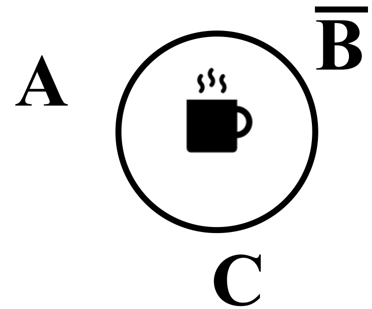
或非—或非式

$$= \overline{\overline{(\bar{A} + B) \cdot (A + C)}} = \overline{\overline{\bar{A} + B} + \overline{A + C}}$$

二、标准与或表达式

一个真值表可能对应多个一般与或式，但只对应一个标准与或式。

1.最小项、最小项表达式



(1)最小项的概念及其表示

A变量　B变量　C变量

$\overline{A}$　$\overline{B}$　$\overline{C}$

A　B　C

照片专辑-yydm

照片编号?

例1　已知三变量函数 F(A,B,C)，则 $A\overline{B}C$就是一个最小项，通常写成m_5。

其中，m 表示最小项，5 表示最小项的编号

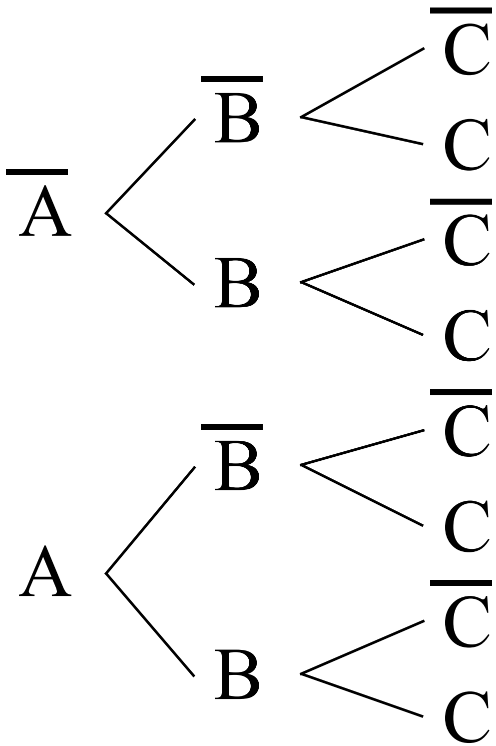
$$A\overline{B}C \longrightarrow (101)_2 \longrightarrow (5)_{10}$$

变量排序　　二进制数　　编号

【最小项】是一种特殊的乘积项（与项），在该乘积项中逻辑函数的所有变量都要以原变量或反变量的形式出现一次，而且只能出现一次。

一变量函数，如 **F(A)**，共有：**2**个最小项

二变量函数，如 **F(A,B)**，共有：**4**个最小项



【结论】n变量函数，共有：2^n个最小项

单选题 2分

设置

1.已知四变量函数 F(A,B,C,D)，则 $B\overline{A}CD$就是一个最小项，其最小项编号为多少？

A 7

B 11

C 13

D 14

提交

(2)最小项表达式（标准与或式）

例2 $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$

$$=m_0+m_2+m_4$$

$$=\sum(m_0,m_2,m_4)$$

$$=\sum m(0,2,4)$$

$$\boxed{F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}=\sum m(0,2,4)}$$

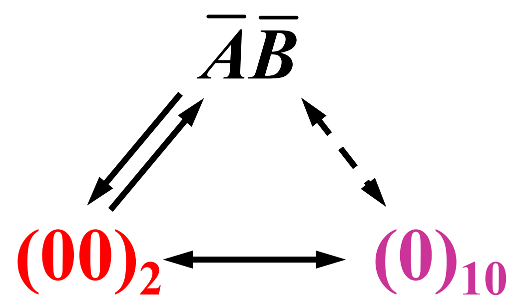
写编号 必排序！

2. 最小项的性质

① 对任何一个最小项，只有一组变量的取值组合，使它的值为1。

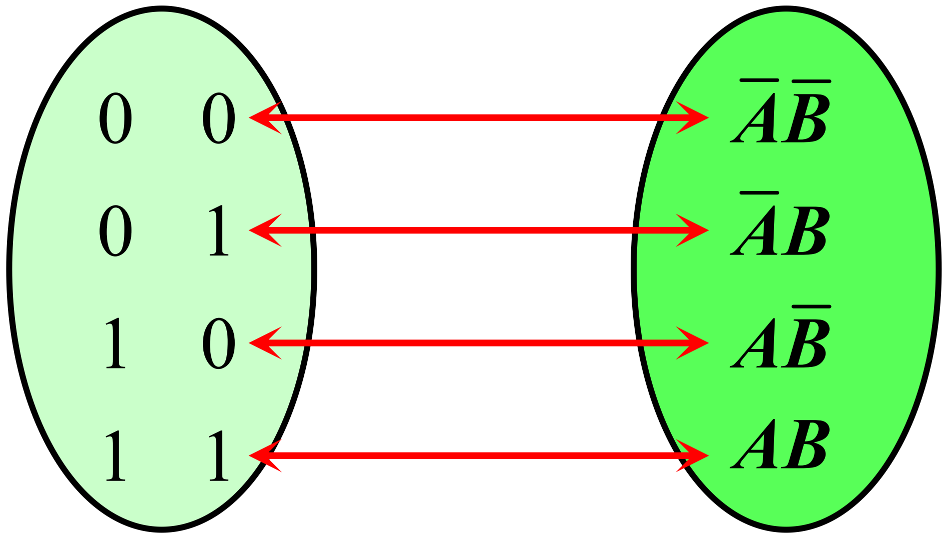
$A\ \ B$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	AB
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

变量之积形式



最小项编号

与最小项对应的取值组合



变量取值组合 与 最小项 一一对应！

②全部最小项之和恒等于1。

即：$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

A B	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	AB	$\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}+AB$
0 0	1	0	0	0	1
0 1	0	1	0	0	1
1 0	0	0	1	0	1
1 1	0	0	0	1	1

$$\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}+AB=1$$

$$F_1(A,B) = \overline{A}\,\overline{B} = m_0$$

$$F_2(A,B) = \overline{A}B = m_1$$

$$F_3(A,B) = A + \overline{B} = \overline{\overline{A}B} = \overline{m}_1$$

$$F_1(A,B)F_2(A,B) = m_0 m_1 = ?$$

$$F_1(A,B)F_3(A,B) = m_0 \overline{m}_1 = ?$$

③任意两个不同最小项的乘积恒等于0 。

即： $m_i \cdot m_j = 0 \quad (0 \le i(j) \le 2^n - 1, 且 i \ne j)$

$A \quad B$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	AB	$\overline{A}\,\overline{B} \cdot \overline{A}B$
0 0	1	0	0	0	0
0 1	0	1	0	0	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	0	0	1	0

$$\boldsymbol{m_0 m_1 = 0}$$

$A\ \ B$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	AB	$\bar{A}\bar{B}\cdot\overline{\bar{A}B}$
0 0	1	0	0	0	1
0 1	0	1	0	0	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	0	0	1	0

$$\boldsymbol{m_0\bar{m}_1 = m_0} \Rightarrow m_i\cdot\overline{m_j} = m_i$$

④任一最小项与另一最小项非之积恒等于该最小项 。

即： $m_i \cdot \overline{m}_j = m_i \ (0 \le i(j) \le 2^n - 1, \text{且} i \ne j)$

若自变量的取值组合使$\mathbf{m_i} = \mathbf{1}$ (有且只有一组)，

则：$m_i \cdot \overline{m_j} = 1 = m_i$

若自变量的取值组合使$\mathbf{m_i} = \mathbf{0}$ (其余$\mathbf{2^n}$**-1**组)，

则：$m_i \cdot \overline{m_j} = 0 = m_i$

故，对所有自变量的取值组合，$m_i \cdot \overline{m_j} = m_i$

3. 几个关系式

(1)若$F=\sum m_j$,则$\overline{F}=\sum m_k$

（k为$0\sim(2^n-1)$中除了j以外的所有正整数）

例：$F(A,B,C)=\sum m(1,2,4)$, 则$\boldsymbol{\overline{F}(A,B,C)=\sum m(0,3,5,6,7)}$

根据最小项的性质1:对任何一个最小项，只有一组变量取值组合，使它的值为1。

若自变量的取值组合使 $\sum m_j=1$, 则: $\sum m_k=0$;

若自变量的取值组合使 $\sum m_j=0$, 则: $\sum m_k=1$;

所以 $\overline{\sum m_j}=\sum m_k$ 即上述关系式成立。

(2)若$\overline{F}=\sum m_j$，则$F'=\sum m_k \quad (k=(2^n-1)-j)$

根据反演规则和对偶规则之间的关系可知，$\overline{\mathrm{F}}$中的原、反变量互换，即得到F′。

所以，$\overline{\mathrm{F}}$和F′中包含的最小项的个数是相等的，且对应的最小项的编号之和为(2^n-1)。

即上述关系式成立。

$$\overline{F}(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\begin{array}{ccc} 000 & 010 & 100 \\ 111 & 101 & 011 \end{array}$$

$$F'(A,B,C)=ABC+A\overline{B}C+\overline{A}BC$$

单选题 1分

设置

2.若 $\overline{F}(A,B,C)=\sum m(3,4,6)$ 则 $F'(A,B,C)=\sum m(\ ?\ )$

A 0,1,2,5,7

B 0,2,5,6,7

C 1,3,4

D 2,4,5

提交

设置

3.若$F(A,B,C)=\sum m(3,4,6)$ 则 $F'(A,B,C)=\sum m(?)$

A 0,1,2,5,7

B 0,2,5,6,7

C 1,3,4

D 2,4,5

提交

4. 由一般表达式写出最小项表达式的方法

一般表达式 $F = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{A}C}} \longrightarrow$

一般与或式 $\xrightarrow{A+\overline{A}=1}$ 最小项表达式

例3 试将$F(A,B,C)=AB$展开成最小项之和的形式。

解：$F(A,B,C) = AB(C+\overline{C}) = AB\overline{C} + ABC$

$$= \sum m(6,7)$$

5. 由真值表写出最小项表达式的方法

真值表中使函数值为1的取值组合所对应的各最小项之和

A B	F
0 0	1
0 1	0
1 0	1
1 1	0

例4 试将真值表所示的逻辑函数用最小项表达式表示。

解：$F(A,B) = m_0+m_2$

A B	m_0	m_1	m_2	m_3	F				
0 0	1	0	0	0	1	m_0	留	$m_1m_2m_3$	待定
0 1	0	1	0	0	0	m_1	去	m_2m_3	待定
1 0	0	0	1	0	1	m_2	留	m_3	待定
1 1	0	0	0	1	0	m_3	去		

【若$F=\sum m_j$,则$\overline{F}=\sum m_k$】 再回首

	A B	F
m_0	0 0	1
m_1	0 1	0
m_2	1 0	1
m_3	1 1	0

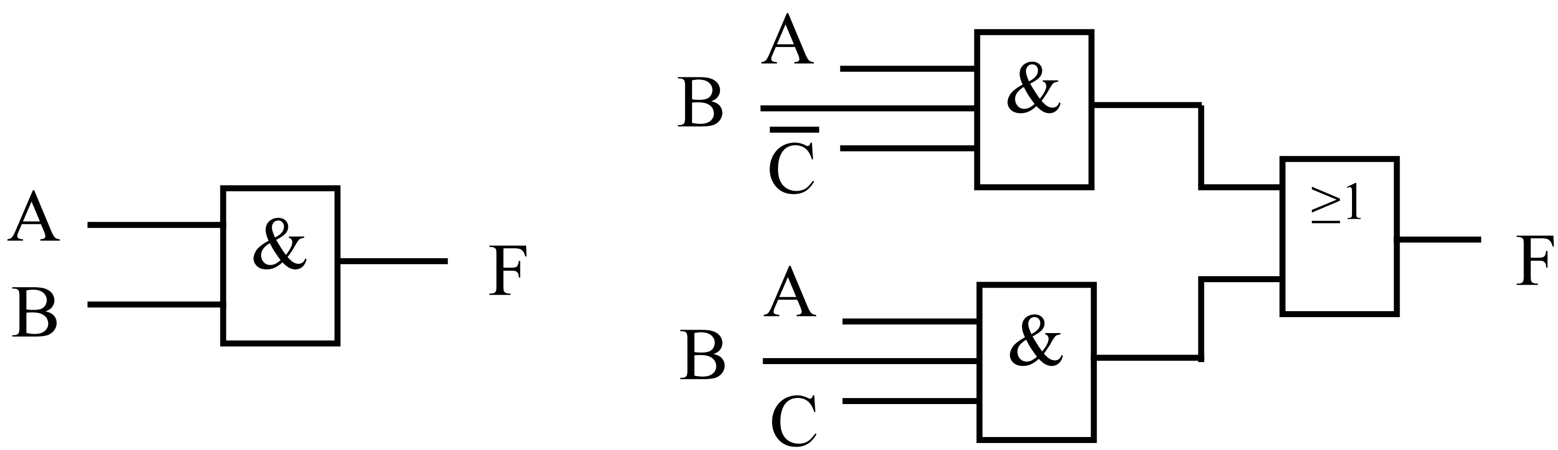
A B	$\overline{F}$
0 0	0
0 1	1
1 0	0
1 1	1

$\mathbf{F(A,B) = m_0+m_2}$

$\mathbf{\overline{F}(A,B) = m_1+m_3}$

函数的一般与或式具有多样性，最小项表达式具有唯一性。两者的实现电路通常具有较大的差异。

$$F(A,B,C) = AB(C + \overline{C}) = AB\overline{C} + ABC$$



需要化简函数！